aus Abi 2023 / Teil A / Analysis / Aufgabengruppe 1

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(x-3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Ableitungsfunktion f'.

a) Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an.
b) Ermitteln Sie diejenige Stelle $x \in D$, für die $f'(x) = 2$ gilt.

a) *Das Argument vom ln muss immer > 0 sein* $\Rightarrow$

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow D =]3; +\infty[$

Da der ln nur bei 1 eine Nullstelle hat $\Rightarrow$

$\ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \Rightarrow$ Nullstelle $x_0 = 4$

b) $f'(x) = \frac{1}{x-3} \cdot 1 = \frac{1}{x-3}$

$\frac{1}{x-3} = 2 \quad | \cdot (x-3)$

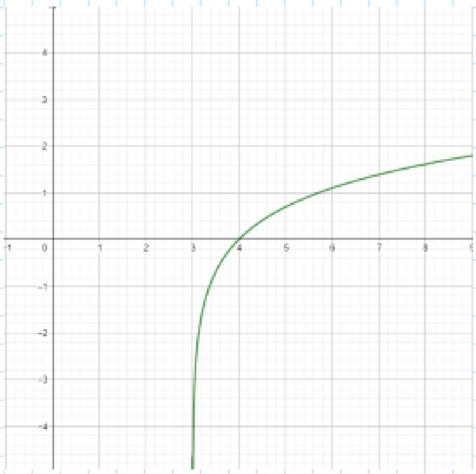
$1 = 2 \cdot (x-3)$

$1 = 2x - 6 \quad | + 6$

$2x = 7 \quad | : 2$

$x = 3{,}5$

also: $f'(3{,}5) = 2$



2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}\backslash 0$ definierte Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 1$

a) Geben Sie eine Gleichung der waagrechten Asymptoten des Graphen von g sowie die Wertemenge von g an.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g(x)dx$.

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = -1$

$\Rightarrow$ waagr. Asymptote $y = -1$

Wertemenge: $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - 1 > -1$

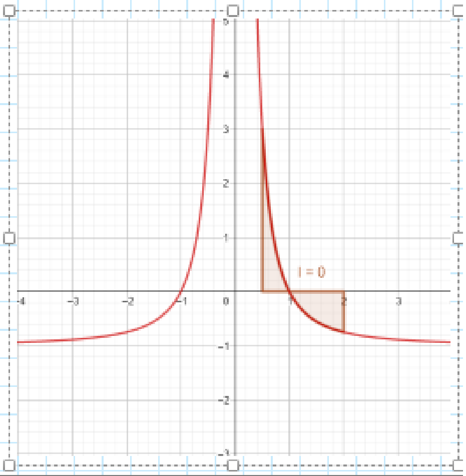
für $x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to +\infty \Rightarrow W =]-1; +\infty[$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - x \right]_{\frac{1}{2}}^{2} =$

$= \left(-\frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) =$

$= -\frac{5}{2} - \left(-2 - \frac{1}{2} \right) =$

$= -\frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$

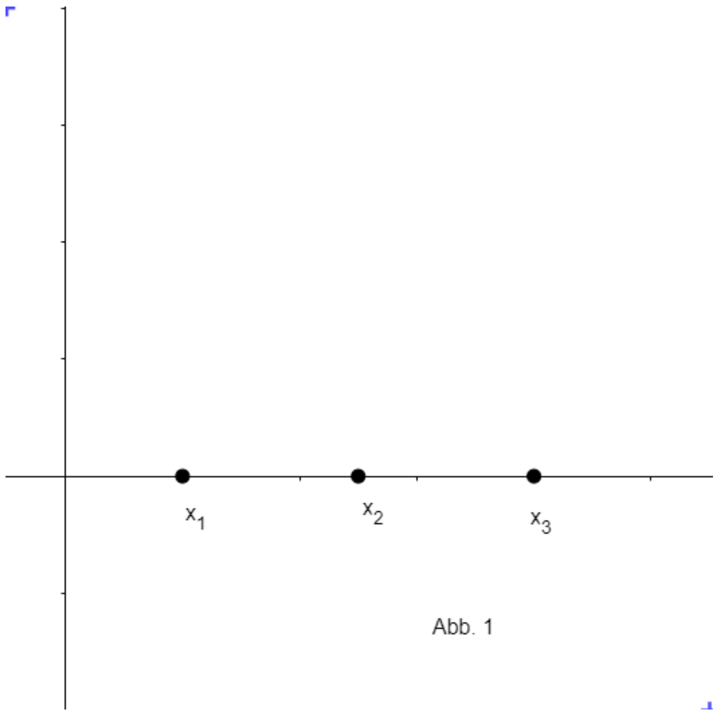


3 Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit
1. Ableitungsfunktion f' und 2. Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

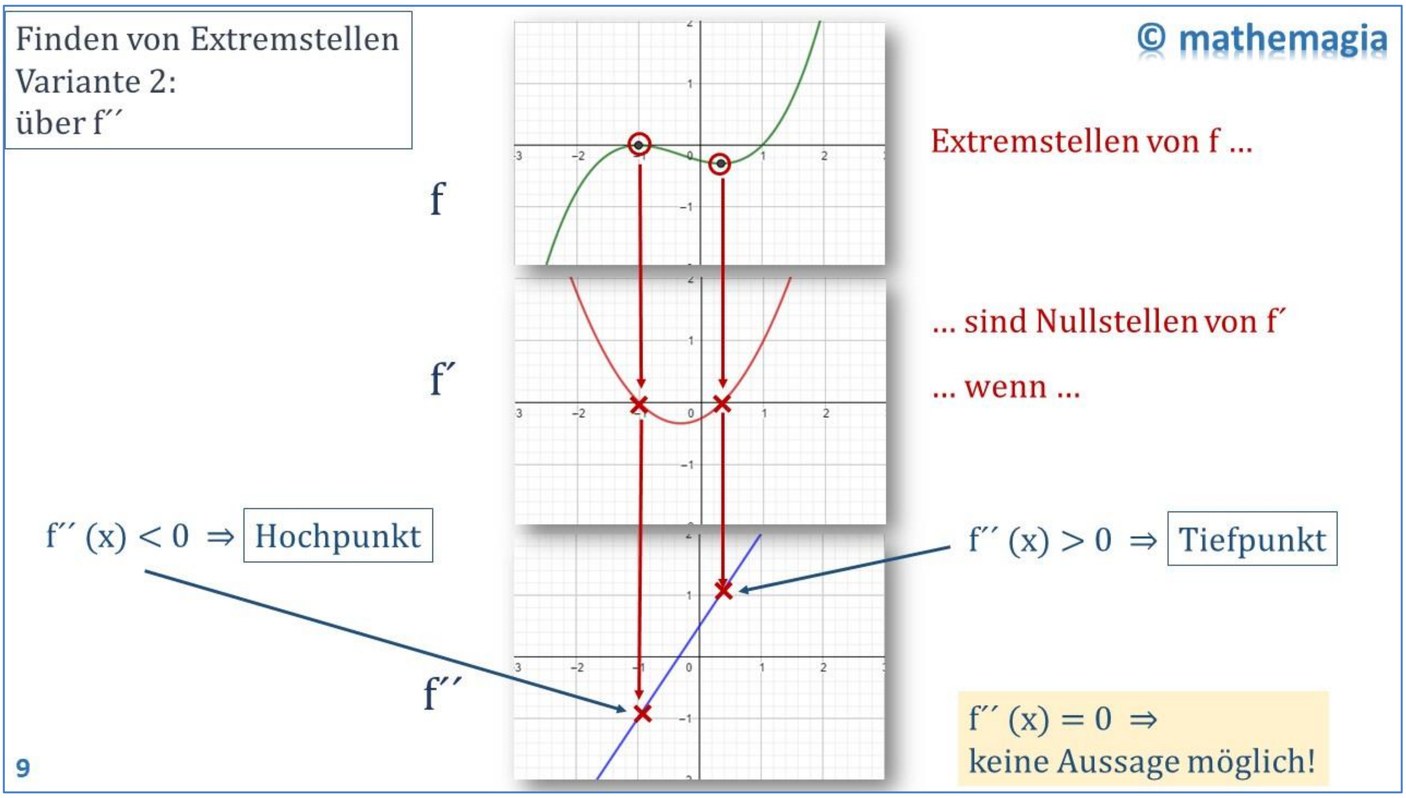
— f hat bei x_1 eine Nullstelle.
— Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
— f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

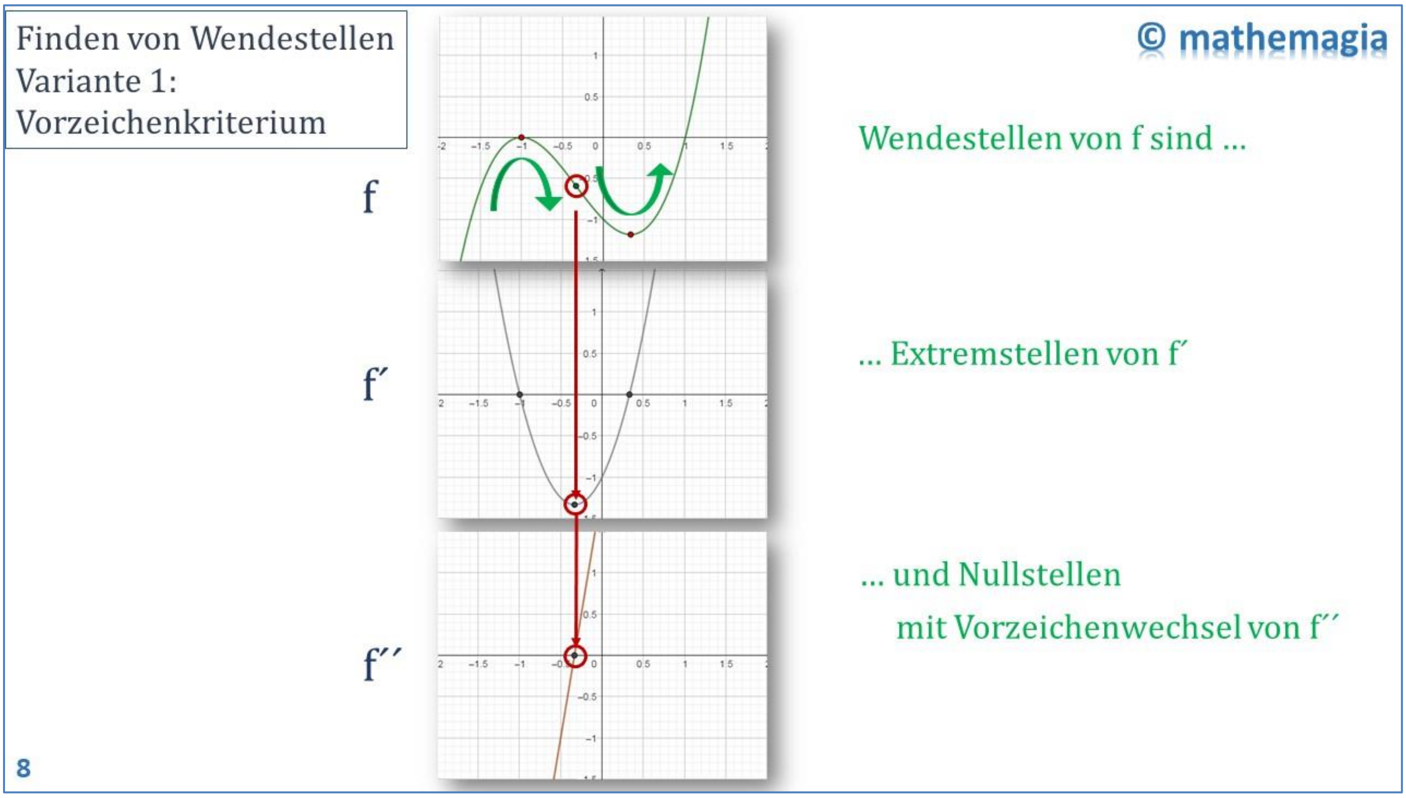
Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

a) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.
b) Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.



Die Zusammenhänge zwischen Null-, Extrem- und Wendestellen von f, f´ f´´ sind nachfolgend dargestellt:





a)
f' *hat ein lokales Minimum bei* $x_3 \Rightarrow f$ *hat einen Wendepunkt bei* x_3
Weder eine lineare (hier eh ausgeschlossen) noch
eine quadratische Funktion haben einen Wendepunkt
$\Rightarrow$ *der Grad muss mindestens 3 sein!*

f *hat bei* x_1 *eine Nullstelle*

aus $f'(x_2) = 0$ *und* $f''(x_2) \neq 0$
$\Rightarrow f$ *hat bei* x_2 *eine Extremstelle*
(entweder ein Minimum oder
ein Maximum).
Hier nehmen wir mal an ein Maximum.

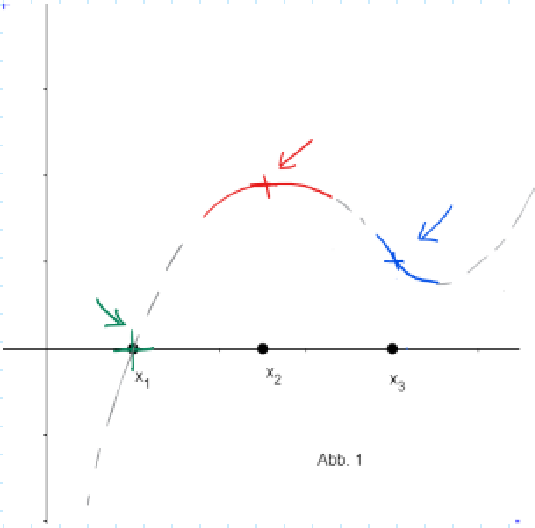


Abb. 1

f' *hat ein lokales Minimum bei* x_3
$\Rightarrow f$ *hat einen Wendepunkt bei* x_3,
an dem die Steigung minimal ist.
Wir haben bei x_2 *ein Maximum gewählt.*
Daher fällt unsere Funktion bei x_3.
$\Rightarrow$ *Es muss also eine Stelle stärkster Abnahme bei* x_3 *sein.*

Anmerkung: Das ist nur **eine** mögliche Funktion, die die Bedingungen erfüllt!