$aus\ den\ Abituraufgaben\ Bayerns\ 2019:$

1)

$Gegeben\ ist\ die\ Funktion\ f(x) = \frac{e^{2x}}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

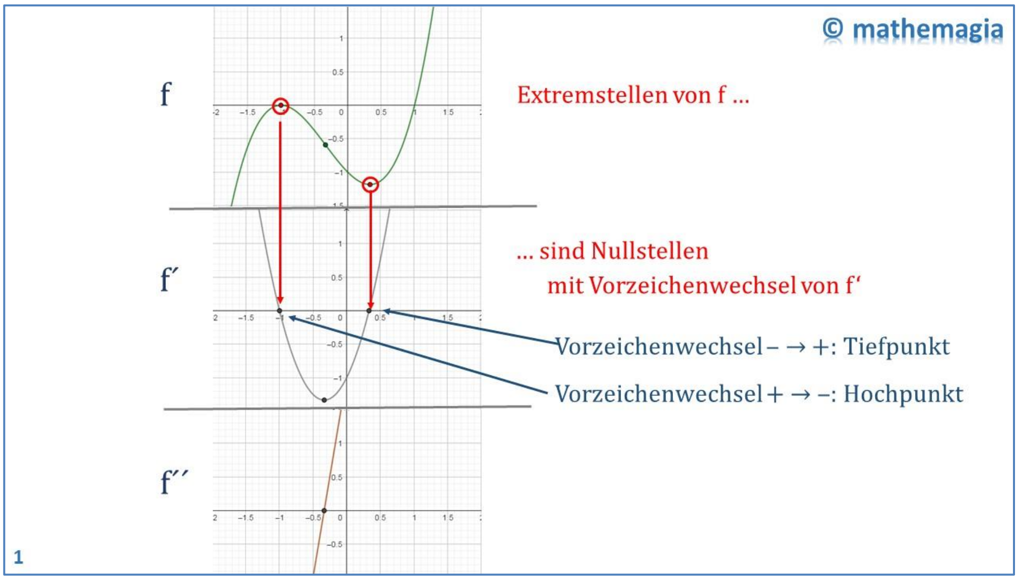
$Gesucht: Lage\ und\ Art\ des\ Extrempunkts\ des\ Graphen\ von\ f$

$\underline{Lösung}:$

$für\ Ableitung\ Quotientenregel\ anwenden:$

Quotientenregel $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{u(x)}}{\mathrm{v(x)}}$ $\mathrm{f'(x)} = \frac{\mathrm{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}}{\mathrm{v^2(x)}}$

$$f'(x) = \frac{x \cdot e^{2x} \cdot 2 - e^{2x} \cdot 1}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$



$Extrempunkte\ gesucht \Rightarrow \boldsymbol{notwendige\ Bedingung}: f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} \cdot (2x - 1) = 0$

$da\ e^{2x} > 0\ für\ alle\ x \Rightarrow$

$2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$Untersuchung\ auf\ \boldsymbol{Vorzeichenwechsel}\ von\ f'\ an\ der\ Stelle\ x=\frac{1}{2}$:

$für\ alle\ x\in D_f\ gilt: x^2>0\ und\ e^{2x}>0$

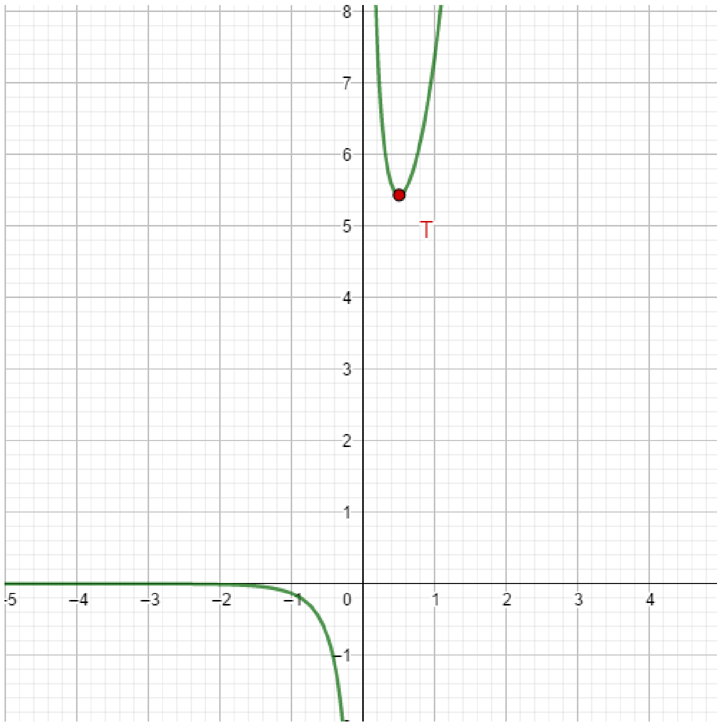
$$x<\frac{1}{2}:\quad 2x-1<0\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}<0$$

$$x>\frac{1}{2}:\quad 2x-1>0\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}>0$$

$$\Rightarrow Vorzeichenwechsel\ von-nach+\Rightarrow Tiefpunkt$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2\cdot\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2e$$

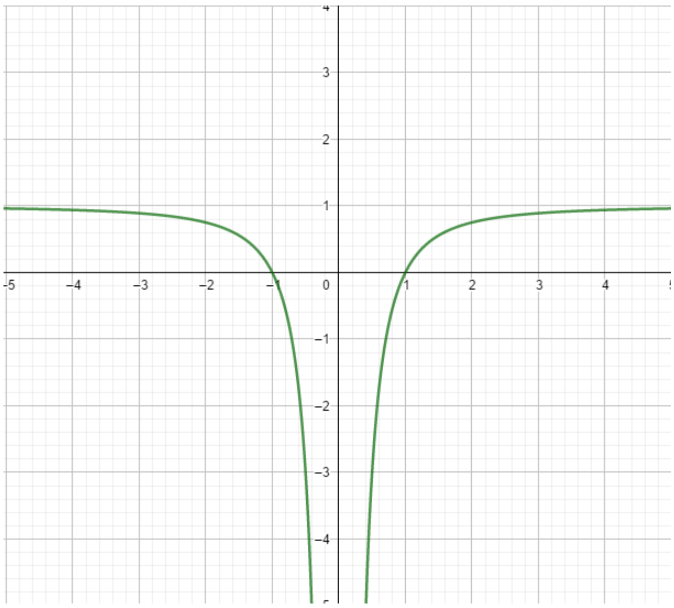
$G_f\ hat\ den\ Tiefpunkt\ T\ \left(\frac{1}{2},2e\right)$.

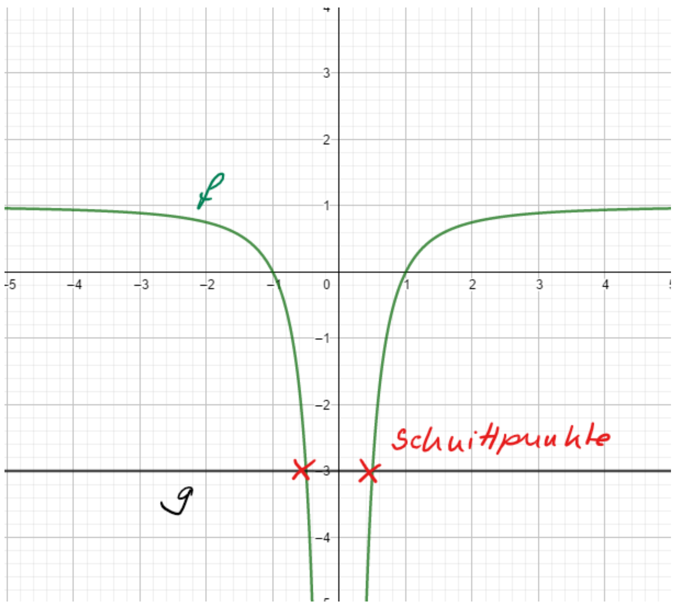


Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *definierte Funktion*
$f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, *die die Nullstellen* $x_1 = -1$ *und* $x_2 = 1$ *hat.*
Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, *der symmetrisch bezüglich der* $y-$*Achse ist.*
Weiterhin ist die Gerade g *mit der Gleichung* $y = -3$ *gegeben.*

a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g *den Graphen von* f *schneidet, die* $x-$*Koordinate* $\frac{1}{2}$ *hat.*

Abb. 1





<u>Lösung:</u>

$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$g: y = -3$

Schnittpunkte von f *und* g *gesucht*
$\Rightarrow$ *Ansatz:* $f(x) = g(x)$

$1 - \frac{1}{x^2} = -3$

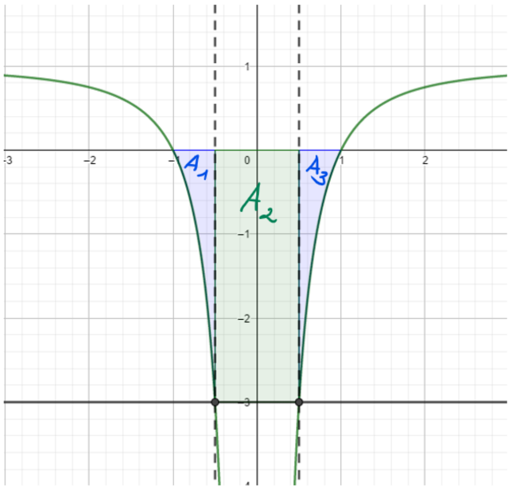
$1 + 3 = \frac{1}{x^2}$

$4 = \frac{1}{x^2}$

$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f *und* g *schneiden sich bei:* $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}}$ *und* $x_2 = -\frac{1}{2}$.

$b)\ Bestimmen\ Sie\ rechnerisch\ den\ Inhalt\ der\ Fläche, die\ der\ Graph\ von\ f,$
$die\ x-Achse\ und\ die\ Gerade\ g\ einschließen.$



Lösung:

$aus\ Angabe:$
$f\ hat\ die\ Nullstellen\ x=-1\ und\ x=+1$

$aus\ Teilaufgabe\ a):$
$f\ und\ g\ schneiden\ sich\ in\ x=-\frac{1}{2}\ und\ x=\frac{1}{2}$

$Vorbemerkung:$
$Da\ g\ nur\ aus\ einem\ konstanten\ Term\ besteht, ist\ neben\ G_f\ auch\ G_g$
$\boldsymbol{achsensymmetrisch\ zur\ y-Achse}!$

$Die\ gesuchte\ Fläche\ setzt\ sich\ aus\ 3\ Teilflächen\ zusammen:$

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx\right|$$

$$A_2 = Fläche\ des\ Rechtecks\ mit\ den\ Seitenlängen\ 2\cdot\frac{1}{2} = 1\ und\ 3$$

$$\Rightarrow A_2 = 3$$

$$A_3 = \left|\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\right| = (wegen\ Achsensymmetrie\ s.o.!) = A_1$$

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\,dx\right| = \left|\left[x+\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}-2\right)-(-1-1)\right| =$$

$$= \left|-\frac{5}{2}+2\right| = \frac{1}{2}$$

$$A_{ges} = 2\cdot A_1 + A_2 = 2\cdot\frac{1}{2}+3 = 4$$

$Der\ gesuchte\ Flächeninhalt\ beträgt\ 4.$